European Girl's Mathematical Olympiad 2013

Pierre-Alain Jacqmin et Michel Sebille

La compétition EGMO (European Girl's Mathematical Olympiad) en est à sa deuxième édition. Créée afin d'encourager les jeunes filles à participer aux olympiades et à faire des études de mathématiques, l'EGMO connait un certain succès. En effet, même si le nombre total de pays participants a augmenté, les organisateurs ont du refuser certaines demandes.

Des participantes de 22 pays se sont affrontées : Belgique, Biélorussie, Bulgarie, Finlande, France, Hongrie, Irlande, Italie, Lettonie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Pologne, Roumanie, Royaume-Uni, Serbie, Slovénie, Suède, Suisse, Turquie, Ukraine, USA. La Belgique était représentée par Élise Delhez, France Gheeraert, Élisabeth Gruwé, Jessica Mulpas (participantes), Michel Sebille (leader) et Pierre-Alain Jacqmin (deputy leader).

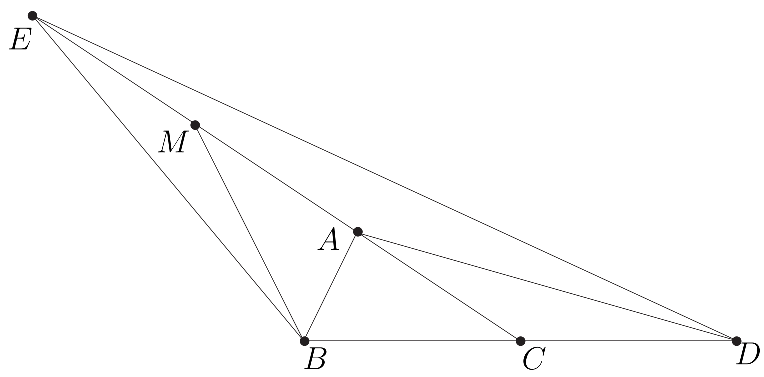
La compétition s'est déroulée à Luxembourg-Ville, au lycée des garçons. Les équipes étaient logées dans l'auberge de jeunesse à une raisonnable distance horizontale du lycée, mais à une distance verticale conséquente. Le 9 avril, les participantes ont visité la Ville-Haute pendant que le jury traduisait les questions. Le 10 et le 11 au matin, les filles affrontaient les questionnaires autant redoutés qu'attendus tandis que le jury coordonnait les corrections futures. L'après-midi et en soirée, après une sieste bien méritée, les participantes se voyaient proposer quelques activités telles que de la danse ou du karaoké. Le 12, pendant que les coordinateurs et les correcteurs se mettaient d'accord, les participantes effectuaient la visite de leur choix avec leur guide ; la maison du chocolat a recueilli un succès certain (Élise Delhez y fêtant son anniversaire). Le 13, après avoir visité la ville de Clervaux ainsi que les expositions du château local, les participantes recevaient les prix durant une cérémonie réhaussée par la présence du premier ministre luxembourgeois Jean-Claude Junker.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini dix-huitième sur vingt-deux. Sur 87 participantes, France Gheeraert est 84ème (3 pts), Élise Delhez 67ème (10 pts et une mention honorable), Élisabeth Gruwé 62ème (11 pts et une mention honorable) et Jessica Mulpas 49ème (14 pts et une mention honorable). La compétition individuelle a été remportée par l'Américaine Danielle Wang (38 pts) et celle par équipe à égalité entre la Biélorussie, la Serbie et les USA (99 pts).

Cette année, les questions étaient au nombre de 6. Le niveau de celles-ci étaient celui des olympiades internationales.

Problème 1 *Le côté $[BC]$ du triangle ABC est prolongé au-delà du point C jusqu'au point D de façon à ce que $|CD| = |BC|$. Le côté $[CA]$ est prolongé au-delà du point A jusqu'au point E de façon à ce que $|AE| = 2|CA|$.*

Montrer que, si $|AD| = |BE|$, alors le triangle ABC est rectangle.



Solution de Élise Delhez
Soit M le milieu du segment $[AE]$ et $x = |EM| = |MA| = |AC|$. On remarque que BM est la médiane du triangle AEB et AC celle du triangle ABD. Dès lors, par le théorème de la médiane,

$$2x^2 + 2|BM|^2 = |BE|^2 + |AB|^2$$

et

$$2x^2 + 2|BC|^2 = |AB|^2 + |AD|^2.$$

En soustrayant ces deux égalités, vu que $|BE| = |AD|$, on obtient $|BM| = |BC|$. On peut en déduire que BA est la médiane du triangle isocèle BMC. Elle en est donc sa hauteur et $|\widehat{BAC}| = 90°$.

Solution de Élisabeth Gruwé
La droite EC est la médiane du triangle BED. Puisque A se trouve aux deux tiers de cette médiane, A est le centre de gravité du triangle BED. Donc DA intersecte le segment $[BE]$ en son milieu. Soit N cette intersection. Puisque A se trouve aux deux tiers de la médiane DN, $|NA| = \frac{|DA|}{2} = \frac{|BE|}{2}$. Dès lors, $|NE| = |NB| = |NA|$ et N est le centre du cercle circonscrit au triangle BAE. Or, B, N et E sont alignés. Donc l'angle $\widehat{BAE}$ intercepte un diamètre de ce cercle circonscrit. Par conséquent, $|\widehat{BAC}| = |\widehat{BAE}| = 90°$.

Problème 2 *Déterminer tous les nombres naturels m tels qu'un carré de taille $m \times m$ peut être découpé en cinq rectangles dont les mesures des côtés sont tous les entiers $1, 2, 3, \ldots, 10$ dans un certain ordre.*

Solution inspirée de celle de Jessica Mulpas
Tout d'abord, il est clair que les différents rectangles doivent être disposés de telle sorte que leurs côtés soient parallèles ou perpendiculaires aux côtés du carrés. Ensuite, puisqu'un des rectangles possède une longueur de 10, on a que $m \geqslant 10$.

Si les longueurs et largeurs sont notées L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 et l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, on a que

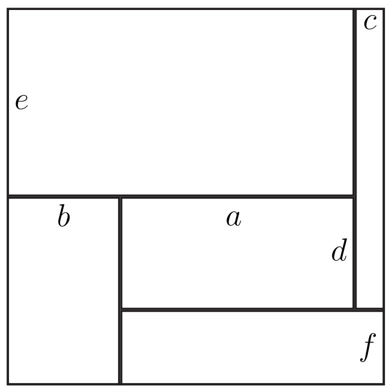
$$L_1l_1+L_2l_2+L_3l_3+L_4l_4+L_5l_5 = \frac{1}{2}(L_1l_1+L_2l_2+L_3l_3+L_4l_4+L_5l_5+l_1L_1+l_2L_2+l_3L_3+l_4L_4+l_5L_5)$$

et ainsi par le théorème fondamental des ensembles ordonnés,

$$L_1l_1+L_2l_2+L_3l_3+L_4l_4+L_5l_5 \geqslant \frac{1}{2}(1\cdot 10+2\cdot 9+3\cdot 8+\ldots+9\cdot 2+10\cdot 1) = 110$$

L'aire du carré $m \times m$ vaut donc au moins 110 et dès lors $m \geqslant 11$.

Puisque $m \geqslant 11$, quatre des rectangles doivent être disposés dans les coins du carré. Une rapide analyse de la configuration nous permet alors de voir que le cinquième rectangle doit être au milieu et ne toucher aucun côté du carré comme sur la figure ci-dessous.



La figure ci-dessus nous permet de dire que

$$a+b+c+d+e+f = 2m$$

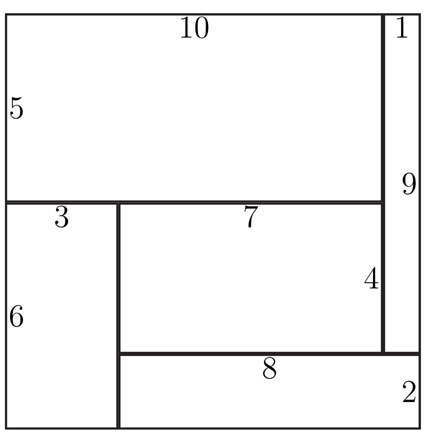
La somme des demi-périmètres des rectangles est $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$, et toujours avec la même figure :

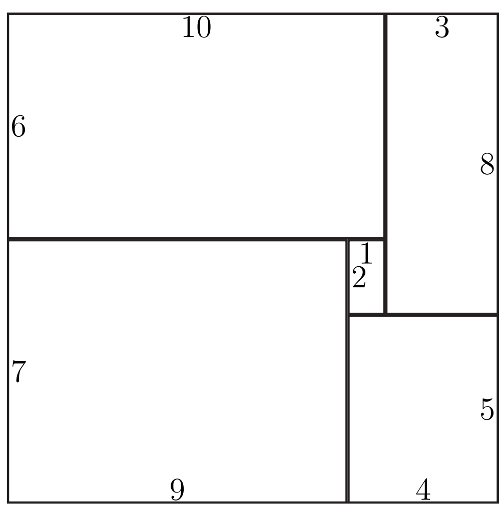
$$3a+2b+2c+3d+2e+2f = 55$$

En combinant les deux égalités :

$$a+d = 55-4m \qquad \text{et} \qquad m \leqslant 13.$$

Il ne reste donc que trois valeurs de m à analyser. Voici des solutions parmi d'autres pour 11 et 13 :





Il ne reste donc qu'à prouver que le cas $m = 12$ ne possède pas de solution. Puisqu'il y a quatre manières d'obtenir 12 comme somme de deux longueurs ($10+2$, $9+3$, $8+4$ et $7+5$), le rectangle central est de taille 1×6.
Convenons de donner les dimensions des rectangles sous la forme horizontal $\times$ vertical. Plaçons un rectangle $10 \times x$ en haut à gauche et donc un rectangle $2 \times y$ ($y > x$) en haut à droite.

- Si le rectangle du milieu est au format 1×6, le rectangle en bas à droite est alors au format $3 \times (12 - y)$ tandis que celui en bas à gauche est au format $9 \times (12 - x)$ et $x + 6 = y$. Mais alors $y > 6$. Si $y = 7$ alors $x = 1$; une contradiction. Si $y = 8$, alors $x = 2$, une contradiction. Une telle configuration est donc impossible.
- Si le rectangle du milieu est au format 6×1, le rectangle en bas à droite est alors au format $8 \times (12 - y)$ tandis que celui en bas à gauche est au format $4 \times (12 - x)$ et $x + 1 = y$. Mais comme les seules dimensions non-utilisées sont $3, 5, 7, 9$, c'est impossible.

Le cas $m = 12$ ne possède donc pas de solution.

Problème 3 *Soit n un nombre entier strictement positif.*

1. *Montrer qu'il existe un ensemble S de $6n$ nombres naturels strictement positifs et deux à deux distincts tel que le plus petit commun multiple de deux éléments quelconques de S ne dépasse jamais $32n^2$.*
2. *Montrer que tout ensemble T de $6n$ nombres naturels strictement positifs et deux à deux distincts contient deux éléments dont le plus petit commun multiple est strictement plus grand que $9n^2$.*

1. Soit $A = \{1, 2, \dots 4n, 4n + 2, 4n + 4, \dots 8n\}$. Le *ppcm* d'un des $4n$ premiers éléments et d'un autre est au plus $4n \times 8n = 32n^2$. Le *ppcm* de deux des $2n$ derniers éléments de A (qui sont pairs) est au plus $8n \times \frac{8n}{2} = 32n^2$.

2. Soient $m+2$ nombres entiers $u_1, u_2, \dots, u_{m+1}, m$ tels que $2 \leqslant m \leqslant u_{m+1} < u_m < \dots < u_2 < u_1$. Ainsi, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m + 1\}$, on a que $\frac{1}{u_1} \leqslant \frac{1}{u_i} \leqslant \frac{1}{m}$. On découpe l'intervalle $[\frac{1}{u_1}; \frac{1}{m}]$ en m sous-intervalles de même taille. Par le principe des tiroirs, deux nombres $\frac{1}{u_i}$ et $\frac{1}{u_j}$ ($i < j$) appartiennent au même sous-intervalle. Dès lors,

$$0 < \frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_i} \leqslant \frac{1}{m}(\frac{1}{m} - \frac{1}{u_1}) < \frac{1}{m^2}.$$

Mais $\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_i}$ est une fraction dont le plus petit dénominateur est $ppcm(u_i, u_j)$ qui est donc strictement supérieur à m^2.
En appliquant cet argument avec $m = 3n$ et les $3n + 1$ plus grands éléments de T, on prouve le résultat demandé.

Problème 4 *Trouver tous les nombres naturels strictement positifs a et b satisfaisant la propriété suivante : il existe trois entiers consécutifs en lesquels la valeur du polynôme*

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

est entière.

On remarque d'abord que si $b = 1$, $(a, 1)$ est une solution pour tout $a \in \mathbb{N}_0$. Supposons maintenant $b > 1$. Supposons aussi que $n \in \mathbb{Z}$ soit tel que

$$(n - 1)^5 + a \equiv n^5 + a \equiv (n + 1)^5 + a \equiv 0 \pmod{b}.$$

On sait que $(n-1)^5+a$ et n^5+a ont des parités différentes. Dès lors, b ne peut être pair. Par ailleurs, en soustrayant ces équations, on obtient le système

$$-5n^4+10n^3-10n^2+5n-1 \equiv 0 \pmod b \tag{1}$$

$$5n^4+10n^3+10n^2+5n+1 \equiv 0 \pmod b. \tag{2}$$

En utilisant maintenant l'algorithme d'Euclide, (1) + (2) donne

$$20n^3+10n \equiv 0 \pmod b. \tag{3}$$

En calculant $4\times(2)-n\times(3)$,

$$40n^3+30n^2+20n+4 \equiv 0 \pmod b. \tag{4}$$

Par $(4)-2\times(3)$, on a que

$$30n^2+4 \equiv 0 \pmod b. \tag{5}$$

Ensuite, en calculant $3\times(3)-2n\times(5)$, on en déduit que

$$22n \equiv 0 \pmod b. \tag{6}$$

Finalement, $11\times(5)-15\times(6)$ donne

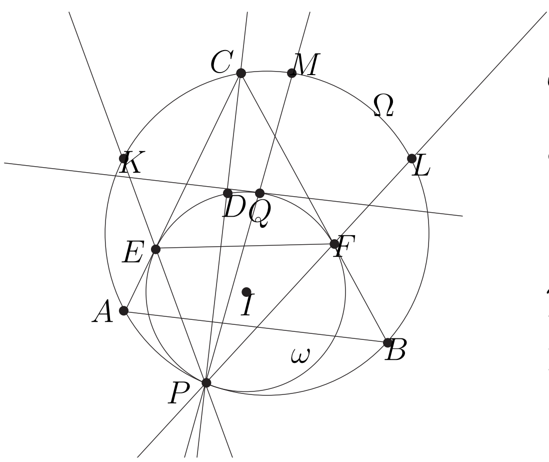
$$44 \equiv 0 \pmod b. \tag{7}$$

Or, puisque b est pair et $b>1$, alors $b=11$. Les résidus des puissances de 5 modulo 11 étant $0,1,10,1,1,1,10,10,10,1,10$, l'ensemble des solutions au problème est

$$\{(a,1) \mid a\in\mathbb{N}_0\}\cup\{(11k+10,11)\mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{(11k+1,11)\mid k\in\mathbb{N}\}.$$

Problème 5 *Soit ABC un triangle dont Ω est le cercle circonscrit. Un cercle ω tangent aux côtés $[AC]$ et $[BC]$ est intérieurement tangent à Ω au point P. Une droite parallèle à AB et intersectant l'intérieur du triangle ABC est tangente à ω au point Q.*

Prouver que $|\widehat{ACP}|=|\widehat{QCB}|$.



Soient E et F les points de tangence de AC et BC au cercle ω, soient K, L et M les intersections entre Ω et PE, PF et PQ, soient I et O les centres de ω et Ω et soit h l'homothétie de centre P envoyant ω sur Ω. Puisque $EI\perp AC$ et que $h(EI)=OK$, alors $OK\perp AC$ et K est le milieu de $\overset{\frown}{AC}$. Similairement, L est le milieu de $\overset{\frown}{BC}$ et M est le milieu de $\overset{\frown}{AB}$.

Dès lors,

$$|\overset{\frown}{BM}|=|\overset{\frown}{MA}| \Longrightarrow |\overset{\frown}{BL}|+|\overset{\frown}{LM}|=|\overset{\frown}{MK}|+|\overset{\frown}{KA}|$$

$$\Longrightarrow |\overset{\frown}{LC}|+|\overset{\frown}{LM}|=|\overset{\frown}{MK}|+|\overset{\frown}{CK}| \Longrightarrow 2|\overset{\frown}{LM}|+|\overset{\frown}{MC}|=|\overset{\frown}{MC}|+2|\overset{\frown}{CK}| \Longrightarrow |\overset{\frown}{LM}|=|\overset{\frown}{CK}|.$$

En appliquant h^{-1}, $|\overset{\frown}{FQ}|=|\overset{\frown}{DE}|$ (D étant l'intersection de ω et CP). De plus, CE et CF étant tangentes à ω, on a que $|\widehat{DEC}|=|\widehat{CFQ}|$. Mais $|CE|=|CF|$ et donc les triangles EDC et FCQ sont isométriques. On en conclut donc que $|\widehat{ACP}|=|\widehat{QCB}|$.

Problème 6 *Blanche-Neige et les sept nains vivent dans leur chaumière dans la forêt. Chaque jour durant seize jours consécutifs, chaque nain a décidé d'aller soit cueillir des baies dans la forêt, soit d'aller travailler dans la mine de diamants. Pour toute paire de jours différents (pas nécessairement consécutifs), au moins trois nains ont chacun effectué les deux sortes de travail pendant ces deux jours. Le premier jour, les sept nains ont tous travaillé dans la mine.*

Prouver que, parmi ces seize jours, il en existe un lors duquel tous les nains ont cueilli des baies.

Première solution : On définit ici un code de Hamming. Or celui-ci est unique et autocomplémentaire. Ainsi, puisqu'il y a un jour durant lequel les sept nains travaillent à la mine, il y en a un durant lequel ils cueillent tous des baies.

Deuxième solution : Chaque jour, le tableau de travail peut être représenté par un vecteur de 0 et de 1 défini de la manière suivante : si le $i$ème nain a travaillé à la mine, la coordonnée correspondante est 0 et 1 dans le cas contraire. Le vecteur du premier jour est donc (0000000). Le nombre de 1 d'un vecteur est appelé son poids.

Il y a 128 vecteurs composés de 0 et de 1. Il y a 8 vecteurs à distance 0 ou 1 d'un vecteur.

Puisque $128 = 16 \cdot 8$, tout vecteur est à distance 0 ou 1 d'un des 16 vecteurs du planning. Aucun vecteur de poids 1 ou 2 ne fait partie du planning car il ne serait pas à distance au moins 3 de (0000000).

Chacun des 21 vecteurs de poids 2 doit être à distance 1 d'un vecteur de poids 3 ; chaque vecteur de poids 3 étant à distance 1 de trois vecteurs de poids 2, il faut exactement 7 vecteurs de poids 3. Les 28 autres vecteurs de poids 3 doivent donc être à distance 1 de vecteurs de poids 4 du planning.

Chaque vecteur de poids 4 étant à distance 1 de quatre vecteurs de poids 3, le planning doit donc contenir 7 vecteurs de poids 4. Chacun de ces vecteurs est à distance 1 de trois vecteurs de poids 5. Les 21 vecteurs possibles de poids 5 sont donc à distance 1 d'un vecteur du planning.

Le dernier vecteur du planning est donc de poids 6 ou 7. Les huit vecteurs de poids 6 ou 7 n'étant pas à distance 1 d'un des quinze vecteurs du planning, l'un d'entre eux doit y figurer et les sept autres doivent être à distance 1 de celui-ci. La seule possibilité est donc de prendre (1111111) dans le planning.

Toutefois, même si l'énoncé présuppose que c'est le cas, il reste à voir si une telle configuration existe réellement. Voici une solution :

0100010101110101
0110001000111011
0011000110011101
0101100001001111
0010110010100111
0001011011010011
0000101111101001